# Arany János Tehetséggondozó Program matematikaversenye 2022

## 10. évfolyam

## Megoldókulcs

1. Mely valós számok teszik igazzá az alábbi egyelőséget:

$$\sqrt{2x+1}=x-1$$ 8 pont

Megoldás:

A négyzetgyök értelmezése miatt $x \geq -\frac{1}{2}$ 1 p

Az értékkészlet figyelembe vételével a kikötés $x \geq 1$ 1 p

{Ezek a pontok akkor is járnak, ha „csak” ellenőriz a diák.}

Végezzük el a következő átalakításokat:

$2x-1=(x-1)^2$ 1 p

$x^2-4x=0$ 1 p

$x(x-4)=0,$

$x_1=0, \quad x_2=4$ 2 p

$x_1=0$ hamis gyök 1 p

$x_2=4$ valóban gyök, ellenőrzés, vagy hivatkozva az $x \geq 1$ kikötésre és az ekvivalens átalakításokra. 1 p

**Összesen: 8 pont**

2. Két jármű - $v_1$ illetve $v_2$ sebességgel – az $A$ és $B$ helységek között oda – vissza mozog. Egyszerre indulnak $A$ – ból illetve $B$ – ből egymással szembe. Mennyi idő múlva találkoznak másodszor pontosan az út felénél, ha $AB=150\,km$, $v_1=50\frac{km}{h}$, $v_2=30\frac{km}{h}$.

8 pont

Megoldás:

Az $v_1=50\frac{km}{h}$ sebességgel közlekedő jármű $1{,}5+3k \quad (k \in \mathbb{N})$ időpontokban halad át az út felénél. 2 p

A $v_2 = 30\dfrac{km}{h}$ sebességgel közlekedő jármű $2,5+5l \quad (l \in \mathbb{N})$ időpontokban halad át az út felénél. 2 p

Azon időpontok érdekesek, melyekre az

$$1,5+3k = 2,5+5l$$

egyenletnek van megoldása az $\mathbb{N}^2$ halmazon. 2 p

$$k = \frac{5l+1}{3}$$

Ennek a „második” megoldása $l = 4$ esetén $(k = 7)$, azaz 22,5 óra múlva találkoznak másodszor az út felénél. 2 p

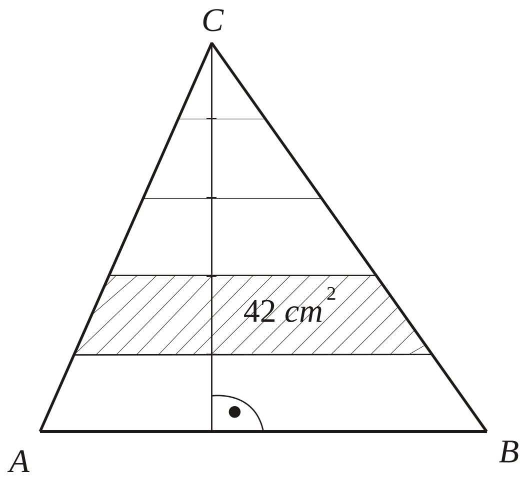
**Összesen: 8 pont**

A 8 pontot kapja meg akkor is ha „lemodellezi”.

3. Az $ABC$ hegyesszögű háromszög $C$ csúcsából induló magasságát felosztjuk öt egyenlő részre és az osztópontokon keresztül párhuzamosakat rajzolunk az $AB$ oldallal. A háromszögnek a harmadik és a negyedik osztópontokon át rajzolt párhuzamosok közé eső részének a területe $42\,cm^2$.

Mekkora az $ABC$ háromszög területe? 10 pont

Megoldás:




A keletkezett „kis” háromszögek hasonlók az $ABC$ háromszöghöz. 2p

{akkor is jár a pont, ha csak a megoldásból derül ki a gondolat.}

A hasonló síkidomok területeinek aránya megegyezik a hasonlóság arányszámának a négyzetével. 2 p

Ezt figyelembe véve az egyes részek területe rendre {„felülről” kezdve}:

$$T,\ 3T,\ 5T,\ 7T,\ 9T.$$ 4 p

A feltétel szerint $7T = 42\ cm^2$, így $T_{ABC} = 25T = 150\ cm^2$. 2 p

**Összesen: 10 pont**

4. A háromjegyű pozitív számok közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott szám

a) pozitív osztóinak száma páratlan? 6 pont

b) a 3 és a 7 közül pontosan az egyikkel osztható? 6 pont

{A valószínűség a kedvező és az összes esetek számának az aránya.}

4. a) feladat megoldása:

Páratlan sok pozitív osztója a négyzetszámoknak van. 2 p

Háromjegyű négyzetszám $\left(10^2, 11^2, \ldots, 31^2 = 961\right)$ összesen 22 van. 2 p

A háromjegyű pozitív egészek száma 900. 1 p

A keresett valószínűség $\frac{22}{900} = \frac{11}{450} \left(\approx 0{,}0244\right)$ 1 p

**Összesen: 6 pont**

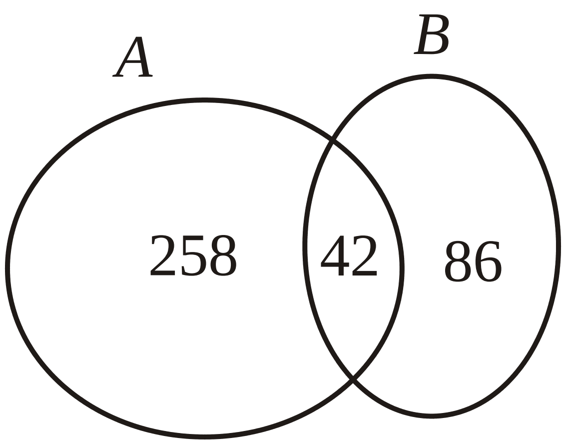
4. b) feladat megoldása:

Jelölje $A$, illetve $B$ a 3 – mal, illetve 7 – tel osztható háromjegyű számok halmazát, a halmazok számosságát szokásosan pl. $|A|$, $|B|$.

$$|A| = \left[\frac{900}{3}\right] = 300$$ 1 p

$$|B| = \left[\frac{900}{7}\right] = 128$$ 1 p

$$|A \cap B| = \left[\frac{900}{21}\right] = 42$$ 1 p




1 p

$$|A \setminus B| + |B \setminus A| = 258 + 86 = 344$$ 1 p

{*Megjegyzés:* az 1+1 pont akkor is jár, ha helyesen jut el a 344-es eredményhez.}

Így a keresett valószínűség: $\frac{344}{900}=\frac{86}{225}\left(\approx 0{,}3822\right)$ 1 p

**Összesen: 6 pont**

5. a) Mely *n* egész számok esetén lesz a $\frac{2n-3}{n+2}$ tört értéke egész szám? 4 pont

b) Oldd meg a következő egyenletet, ha *x* és *y* egész számok

$$2xy-3x-3y+1=0$$ 8 pont

Megoldás:

5. a) feladat megoldása:

$$\frac{2n-3}{n+2}=\frac{2\left(n+2\right)-7}{n+2}=2-\frac{7}{n+2}$$ 2 p

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $n+2$: | 7, | 1, | -7, | - 1 | |
| $n$: | 5, | - 1, | -9, | - 3 | 2 p |

{Minden „megtalált" helyes értékre kapjon a diák 1 pontot.}

**Összesen: 4 pont**

5. b) feladat 1. megoldása:

$$4xy-6x-6y+2=0,$$
$$4xy-6x-6y+9=7,$$
$$2x\left(2y-3\right)-3\left(2y-3\right)=7,$$
$$\left(2x-3\right)\left(2y-3\right)=7.$$ 4 p

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $2x-3$: | 7 | 1 | - 7 | - 1 | |
| $2y-3$: | 1 | 7 | - 1 | - 7 | |
| $x$: | 5 | 2 | - 2 | 1 | |
| $y$: | 2 | 5 | 1 | - 2 | 4 p |

{Minden „megtalált" helyes értékpárra kapjon a diák 1 pontot.}

**Összesen: 8 pont**

5. b) feladat 2. megoldása:

Fejezzük ki az egyenletből pl. $y$ – t.

$$y\left(2x-3\right)=3x-1,$$

$$y=\frac{3x-1}{2x-3}\ \Rightarrow\ 2y=\frac{6x-2}{2x-3}=\frac{3\left(2x-3\right)+7}{2x-3}=3+\frac{7}{2x-3}$$ 4 p

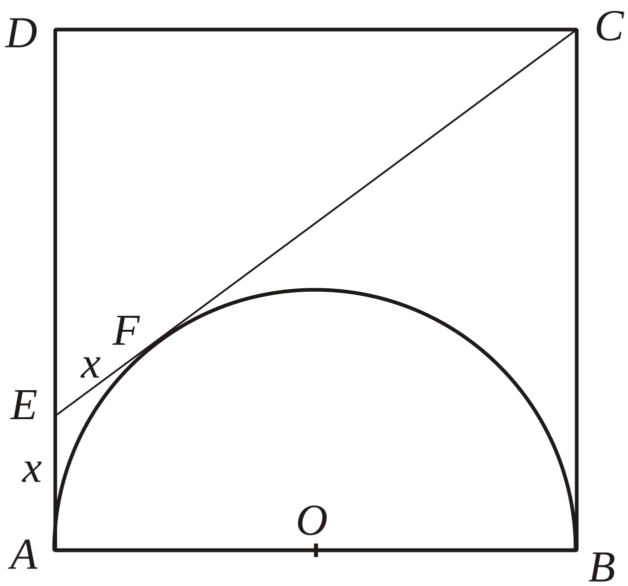
Folytatás az 1. megoldás szerint. 4 p

**Összesen: 8 pont**

6. Az $ABCD$ négyzet $AB$ oldalán befelé megrajzoljuk az $AB$ átmérőjű félkört, majd ehhez $C$ – ből – $CB$ – től eltérő – érintőt. Ennek az érintőnek az $AD$ oldallal való metszéspontját jelölje $E$. Mekkora az $EDC$ háromszögbe írt kör sugara, ha a négyzet oldala $10\,cm$?

10 pont

1. Megoldás:




Jelölje az érintési pontot $F$. Felhasználjuk, hogy a külső pontból a körhöz húzott érintő szakaszok hossza egyenlő, ezért

$CF = CB = 10\ cm$ 1 p

$EF = AE = x$ 2 p

Alkalmazva Pitagorasz tételét az $EDC$ derékszögű háromszögre:

$(10-x)^2 + 10^2 = (10+x)^2$, 2 p

$100 = 40x, \qquad x = 2{,}5cm.$ 1 p

Így már az $EDC$ háromszög oldalai meghatározhatók:

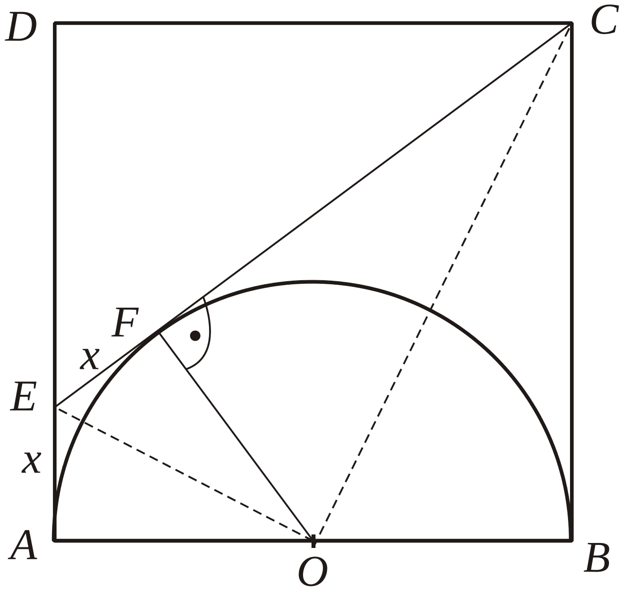
$ED = 7{,}5\ cm,\ DC = 10\ cm,\ EC = 12{,}5\ cm.$ 1 p

A keresett kör sugarát a $t = r \cdot s$ képet (vagy mivel a háromszög derékszögű, így $r = s - c$) alapján határozhatjuk meg, ahol $t$ a háromszög területét, $r$ pedig az $EDC$ háromszög beírható körének a sugarát jelöli. 2 p

$\frac{7{,}5 \cdot 10}{2} = r \cdot 15, \qquad \Rightarrow \qquad r = 2{,}5\ cm.$ 1 p

**Összesen: 10 pont**

2. Megoldás az $\boldsymbol{x}$ szakasz meghatározására:




Ha $O$ jelöli az $AB$ oldal felezőpontját, akkor nyilvánvalóan az $OBCF$ és az $OFEA$ négyszögek deltoidok, melyeknek $OC$ illetve $OE$ a szimmetriatengelyeik, s emiatt $OCE$ háromszög derékszögű.
Alkalmazva a magasságtételt: $10x = 25, \quad x = 2{,}5cm.$

7. A táblára felírtuk a pozitív egész számokat 1 – től kezdődően 2022 – vel befejezve. Ezután bármely két szám – $a$ és $b$ – letörölhető, s helyettük az $ab-3a-3b+12$ számot kell visszaírni. A 2021. lépés után mely szám maradt a táblán?

10 pont

1. Megoldás:

Tekintettel arra 2022 számunk van, és egy-egy lépésben két számot letörlünk és csak egyet írunk fel helyettük, ezért a 2021. lépés után egy szám marad a táblán.
Jelölje a visszaírandó számot $\boldsymbol{c}$, ekkor

$$c = ab - 3a - 3b + 12,$$
$$c - 3 = (a-3)(b-3).$$

Azaz, ha egy „másik" táblára felírjuk az összes számnál 3 – mal kisebb számot és amikor az „eredeti" táblán letöröljük az $a$ – t és a $b$ -t, akkor ezen letöröljük az $(a-3)$ - at és a $(b-3)$ - at. Az eredetire felírjuk a $c$ -t, ez utóbbin a $(c-3)$ - at.

Mivel $c-3=(a-3)(b-3)$, így az utóbbi táblán a számok szorzata nem változik. Ez kezdetben nyilván 0, így ha utoljára az $x$ marad, akkor $x-3=0$. Azaz az utoljára maradt szám a 3.

**Összesen 10 pont**

2. megoldás:

$$ab - 3a - 3b + 12 = (a-3)(b-3) + 3$$

Kezdetben a 3 – as a táblán van, s ha sem *a*, sem *b* nem 3, akkor marad is. Ha viszont valamelyik a 3 – as, akkor $(a-3)(b-3) = 0$, így a táblára újra felkerül a 3 – as.

Tehát a 3 – as mindegyik lépés után a táblán lesz. Mivel minden lépésnél két számot letörlünk és csak egyet írunk fel, a számok száma minden lépésben 1 – gyel csökken, így a 2021. lépés után egyetlen szám marad. Ezért az utoljára maradt szám a 3.

*Megjegyzés:* Indoklás nélküli helyes „megérzésért” kapjon 2 pontot a diák.