Arany János Tehetséggondozó Program matematikaversenye 2022.

11. évfolyam

1. Melyiknek nagyobb a valószínűsége?
***A*: Két kockával dobva, mindkét dobás 6-os.**
***B*: Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számok közül kettőt kiválasztva, mindkettő osztható 4-gyel.**

10 pont

A:

Mindkét dobás hatféle lehet, ezért az összes lehetséges dobáspár 36 féle lehet. 2 p.

Ezek közül csak a (6, 6) pár a kedvező eset 1 p.

Ezért $P(A)=\frac{1}{36}$. 1 p.

B:

Az első számot 9, a másodikat 8 féleképp választhatjuk ki, tehát az összes eset száma $9\cdot 8=72$.

2 p.

Kedvező eset a (4, 8) és a (8, 4) pár választása. 2 p.

Ezért $P(B)=\frac{2}{72}=\frac{1}{36}$. 1 p.

Tehát $P(A)=P(B)$. 1. p.

Össz.: 10 pont

(Ha a kedvező vagy az összes esetet rosszul határozza meg, de a saját adataiból jól számolja $P(A)$ ill. $P(B)$ értékeit, vagy a köztük levő relációt, akkor a megfelelő 1-1 pontokat kapja meg.)

2. Határozd meg a következő kifejezések pontos értékét számológép nélkül!
(Írd le a számolás lépéseit!)

4+3+5 pont

$a=16^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{16}}=\frac{1}{4}$. 4 p.

$b=\log_8 2 \quad \Leftrightarrow 8^b=2 \quad \Rightarrow \quad b=\frac{1}{3}$. 3 p.

$c=\sin 15^\circ\cdot\cos 15^\circ=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sin 15^\circ\cdot\cos 15^\circ=\frac{1}{2}\cdot\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ 5 p.

Második megoldás

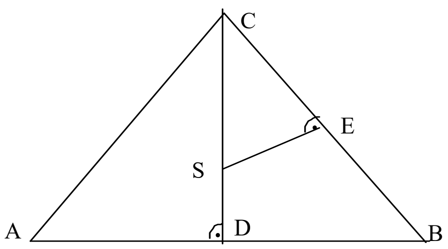
$\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cdot\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\cdot\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos 45^\circ\cdot\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\cdot\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$c=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{6-2}{16}=\frac{1}{4}$. 5 p.

3. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 40 cm, szára 29 cm. Mekkora a súlypontnak a háromszög oldalaitól mért távolsága?

13 pont



Az ADC derékszögű háromszögben $DC=\sqrt{29^2-20^2}=21$ cm.

2 p.

Az S súlypont harmadolja a DC szakaszt, ezért SD=7 cm, és SC=14 cm.

3 p.

SCEΔ~CDBΔ mert egy szögük közös és mindegyik derékszögű. Ezért SE/SC =BD/BC. 4 p.

Ebből SE=(20 ·14) / 29 =280/29 cm (≈9,66 cm.) 3 p.

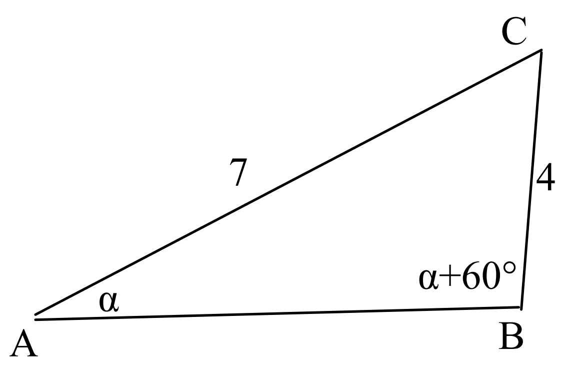
A háromszög szimmetrikusa a CD-re, ezért az AC oldaltól mért távolság is 280/29 cm. 1 p.

Össz.: 13 pont

4. Az ABC háromszögben AC= 7 cm, BC = 4 cm, a velük szemközti szögek különbsége 60°. Mekkora a háromszög területe?

14 pont

Legyen BAC∢ = α, ekkor ABC∢=α+60°. Sinustétel szerint $\dfrac{\sin(\alpha+60^\circ)}{\sin\alpha}=\dfrac{7}{4}$. 3 p.



$$\frac{\sin\alpha\cdot\cos 60^\circ+\cos\alpha\cdot\sin 60^\circ}{\sin\alpha}=\frac{7}{4}$$

$$\frac{\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{7}{4}\quad(*)$$

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg}\alpha=\frac{7}{4}$$

$$\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha=\frac{5}{2}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{5\sqrt{3}}{6}$$

$$\alpha=34,715^\circ+k180^\circ$$

6 p.

Háromszögben csak α=34,715° lehet, ekkor β= 94,715°, γ = 50,57°. 2 p.

A háromszög területe $t=\dfrac{7\ cm\cdot 4\ cm\cdot\sin 50,57^\circ}{2}=10,81\ cm^2$. 3 p.

Második megoldás az α szög kiszámolására (*) tól

$$2\sin\alpha+2\sqrt{3}\cos\alpha=7\sin\alpha.$$

$$2\sqrt{3}\cos\alpha=5\sin\alpha$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{5}=\operatorname{tg}\alpha$$

$$\alpha=34.715^\circ$$

Harmadik megoldás a γ szög kiszámolására

Tangenstétellel: $\dfrac{\mathrm{tg}\dfrac{\beta+\alpha}{2}}{\mathrm{tg}\dfrac{\beta-\alpha}{2}}=\dfrac{b+a}{b-a} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{tg}\dfrac{\beta+\alpha}{2}}{\mathrm{tg}30^\circ}=\dfrac{11}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{tg}\dfrac{\beta+\alpha}{2}=\dfrac{11\sqrt{3}}{9} \Rightarrow \dfrac{\beta+\alpha}{2}=64,715^\circ \Rightarrow \beta+\alpha=129,43^\circ \Rightarrow \gamma = 50,57^\circ$. 9 p.

5. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget és egyenletet!

a) $5x^2 \geq 2 - 3x$ *b)* $\dfrac{2^x}{5^{x-1}}+3=\dfrac{5^x}{2^{x-1}}$ 5 + 12 pont

a) $5x^2 \geq 2 - 3x \Leftrightarrow 5x^2 + 3x - 2 \geq 0$. Az $f(x) = 5x^2 + 3x - 2$ függvény zérushelyei $x_1 = -1$, $x_2 = \dfrac{2}{5}$,

grafikonja egyenes állású parabola, ezért az egyenlőtlenség megoldása $-1 \leq x \leq \dfrac{2}{5}$. 5 p.

b)
Bővítsük a törteket úgy, hogy 2^x és 5^x szerepeljen bennük.

$$\frac{2^x}{5^{x-1}}+3=\frac{5^x}{2^{x-1}}$$
$$\frac{5\cdot 2^x}{5^x}+3=\frac{2\cdot 5^x}{2^x}$$

Legyen $y = \dfrac{2^x}{5^x}$, ekkor az egyenlet: $5y+3=\dfrac{2}{y} \Leftrightarrow 5y^2+3y-2=0$. 7 p.

Ennek gyökei $y_1 = -1$ és $y_2 = \dfrac{2}{5}$. 2 p.

A $\dfrac{2^x}{5^x} = -1$ egyenletnek nincs gyöke, a $\dfrac{2^x}{5^x} = \dfrac{2}{5}$ egyenlet egyetlen gyöke $x=1$. 2 p.

Ez kielégíti az egyenletet. 1 p.

Össz.: 17 pont

***6. a)* Hány olyan háromjegyű szám van, amelyeknek minden jegye páros?**

***b)* Hány olyan háromjegyű szám van, amelyben páros és páratlan számjegy is szerepel?**

***c)* Mennyi az *a)* feladatban szereplő háromjegyű számok összege?**

3 + 5 + 9 pont

a) A százasok helyén 4, a tizesek és egyesek helyién ötféle számjegy szerepelhet egymástól függetlenül, így $4\cdot 5\cdot 5 = 100$ db. olyan háromjegyű szám van, melynek minden jegye páratlan.
3 p.

b) Az összes háromjegyű szám száma 900. A csak páratlan jegyeket tartalmazóké $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$,.
Tehát 900 – 125 – 100 = 675 olyan szám van, amelyben páros és páratlan jegy is szerepel.
5 p.

c) Minden háromjegyű szám felírható $100a+10b+c$ alakban, ahol *a, b, c* a három számjegye.
Ekkor a keresett összeg

$$S=(100a_1+10b_1+c_1)+(100a_2+10b_2+c_2)+...+(100a_{100}+10b_{100}+c_{100})=/$$

$$=100(a_1+a_2+...+a_{100})+10(b_1+b_2+...+b_{100})+(c_1+c_2+...+c_{100}),$$

ahol a_i, b_i, c_i az *i*-edik szám jegyei. 4 p.

Nyilván az $a_1, a_2, ..., a_{100}$ számok között a 2, 4, 6 8 jegyek mind ugyanannyiszor, 25-ször szerepelnek. Így $a_1+a_2+...+a_{100} = 25 \cdot (2+4+6+8) = 500$

A $b_1, b_2, ..., b_{100}$ és a $c_1, c_2, ..., c_{100}$ számok között a 0, 2, 4, 6 8 jegyek mind ugyanannyiszor, 20-szor szerepelnek. Így $b_1+b_2+...+b_{100} = c_1+c_2+...+c_{100} = 20 \cdot (0+2+4+6+8) = 400$ 4 p.

Ezért a csak páros jegyet tartalmazó számok összege: $S=100 \cdot 500+10 \cdot 400+400=54\,400$. 1 p.

Össz.: 17 pont

Ezek a számok egy „ideig” kettesével nőnek, de az egész sorozat nem számtani sorozat.
Mégis, ha valaki a számtani sorozat összegképletével számol, a helyes összeget kapja.
Ilyenkor a c részre max. 3 pontot kapjon.
Ha igazolja, hogy lehet olyan $(\overline{abc}, \overline{def})$ *párokat képezni, amelyekben* $a+d=10$, $b+e=c+f=8$, *és ezekben minden csak páros jegyet tartalmazó, háromjegyű szám pontosan egyszer szerepel, akkor teljes pontszámot kaphat.*

A következő megoldásban nyilvánvaló a párok képzése, és az is, hogy benne minden csak páros jegyet tartalmazó, háromjegyű szám pontosan egyszer szerepel.

Második megoldás

Ha a páros jegyeket tartalmazó háromjegyű számokhoz hozzávesszük a

000, 002, 004, 006, 008, 020, 022, …, 088

egy- és kétjegyű számokat is ebben a formában, (25 számot,) akkor a

000, 002, 004, 006, 008, 020, 022, …, 088, 200, 202, …, 442, 444, 446, …886, 888

125 számot lehet 62 olyan rendezett párba állítani, amelyben az egyiknek három páros jegye *a, b* és *c*, a másiknak $d=8-a$, $e=8-b$ és $f=8-c$, és $\overline{abc} < \overline{def}$ akkor minden ilyen pár összege 888, a 125-ödik szám pedig az 444. 6 p.

Így a 125 szám összege $62 \cdot 888 + 444 = 55\,500$.

Ebből ki kell vonni az első 25 szám összegét, amely ugyanígy számolva $12 \cdot 88+44 = 1\,100$

Tehát a csak páros jegyet tartalmazó, háromjegyű számok összege: $S = 55\,500 - 1\,100 = 54\,400$.
3 p.

Össz.: 17 pont

7. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$x + y = \sqrt{8}$$
$$xy - z^2 = 2$$

17 pont

$x+y$ és xy is pozitív, így x és y csak pozitív lehet. 2 p.
Ezért alkalmazhatjuk a számtani és mértani közép összefüggését:

$$\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2} \qquad (*)$$ 6 p.

Ebből $xy \le 2$, $\Rightarrow$ $xy - z^2 \le 2$, így a második egyenlet csak akkor teljesülhet, ha $xy=2$ és $z^2=0$. (*)-ban akkor állhat egyenlőség, ha $x=y$. 5 p.

Tehát az egyenletrendszer megoldásai $x=\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$, $z=0$. 2 p.

Ezek a számok kielégíti az egyenleteket. 2 p.

Össz.: 17 pont

Második megoldás:

Az első egyenletből $y = \sqrt{8} - x$, ezt a másodikba írva:

$$x(\sqrt{8} - x) - z^2 = 2$$
$$0 = x^2 - \sqrt{8}x + z^2 + 2$$ 4 p.

Ebből $x_{1,2} = \dfrac{\sqrt{8} \pm \sqrt{8 - 4(z^2+2)}}{2} = \dfrac{\sqrt{8} \pm \sqrt{-4z^2}}{2}$ 5 p.

Csak $z = 0$ esetén lesz a diszkrimináns nemnegatív, ekkor $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$. 6 p.
Ell. 2 p.

Harmadik megoldás

Az első egyenletből $y = \sqrt{8} - x$, ezt a másodikba írva:

$$x(\sqrt{8} - x) - z^2 = 2$$
$$-z^2 = x^2 - \sqrt{8}x + 2$$
$$-z^2 = \left(x - \sqrt{2}\right)^2$$ 9 p.

A bal oldal nem pozitív, a jobb oldal nem negatív, ezért a két oldal csak akkor lehet egyenlő, ha mindkét oldal 0. 3 p.

Tehát $z=0$, $x=\sqrt{2}$, $y = \sqrt{8} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}.$ 3 p.
Ell. 2 p.

Össz.: 17 pont